

C^* -algebry
Lista 5

Zad 1. Pokazać, że element C^* -algebry jest rzutem ortogonalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest normalnym idempotentem.

Zad 2. Pokazać, że w dowolnej C^* -algebrze widmo rzutu ortogonalnego zawarte jest w zbiorze $\{0, 1\}$.

Zad 3. Wykazać, że dla dowolnego elementu normalnego $a \in A$ w C^* -algebrze A mamy naturalny izometryczny $*$ -izomorfizm $C^*(a) \cong C_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$.

Zad 4. Pokazać, że jeżeli $u \in A$ jest elementem unitarnym w C^* -algebrze A takim, że $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, to istnieje element samosprężony $a \in A$ taki, że $u = e^{ia}$.

Zad 5. Pokazać, że element w C^* -algebrze jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy jest normalny i jego widmo jest zawarte w zbiorze $[0, \infty)$.

Zad 6 (Rozkład Jordana operatora samosprężonego). Niech a będzie samosprężonym elementem C^* -algebry A . Udowodnić, że istnieją elementy dodatnie $a^+, a^- \in A^+$ takie, że

$$a = a^+ - a^-, \quad a^+ a^- = a^- a^+ = 0.$$

Co więcej, relacje te wyznaczają a^+ i a^- jednoznacznie. Ponadto, $\|a\| = \max\{\|a^+\|, \|a^-\|\}$ i $|a| = a^+ + a^-$.

Zad 7. Uzasadnić, że dla dowolnego elementu odwracalnego $a \in A$ w C^* -algebrze z jedyneką 1, istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $\varepsilon 1 \leq a^* a \leq \varepsilon^{-1} 1$.

Zad 8. Pokazać, że jeżeli $a \in A$ jest samosprężony, to $|a| \pm a \geq 0$ oraz jeśli A posiada jedynekę 1, to również $\|a\| 1 \pm a \geq 0$.

Zad 9. Pokazać, że $0 \leq a \leq b$ implikuje $0 \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Zad 10. Pokazać, że jeżeli $0 \leq a \leq b$ oraz a jest odwracalny, to b jest odwracalny oraz $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Zad 11. Niech A będzie C^* -algebrą z jedyneką. Sprawdzić, że jeżeli $a \in A$ jest samosprężony i kontraktywny, tzn. $a = a^*$ oraz $\|a\| \leq 1$, to wzór

$$u = a + i\sqrt{1 - a}$$

poprawnie definiuje operator unitary taki, że $a = \frac{1}{2}(u + u^*)$.

Zad 12 (Jedynkowe C^* -algebry są rozpięte przez operatory unitarne). Korzystając z zadania powyższego pokazać, że w C^* -algebrze z jedyneką każdy element jest kombinacją liniową (co najwyżej) czterech operatorów unitarnych.

Zad 13 (Rozkład biegunowy dla elementów odwracalnych). Niech A będzie C^* -algebrą z jedyneką. Udowodnić, że dla każdego elementu odwracalnego $a \in A$ mamy $a = u|a|$ dla dokładnie jednoznacznie wyznaczonego operatora unitarnego u .

Zad 14 (Normowa charakteryzacja elementów normalnych). Niech A będzie C^* -algebrą z jedyneką. Wykazać, że $a \in A$ jest unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \text{Inv}(A)$ oraz $\|a\| = \|a^{-1}\| = 1$.

Zad 15. Wykazać, że jedynkowy homomorfizm $\Psi : A \rightarrow B$ między jedynkowymi C^* -algebrami jest kontraktywny, tzn. $\|\Psi\| \leq 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy Ψ zachowuje inwolucje (jest $*$ -homomorfizmem).
Hint: Wykorzystać zadania 12 oraz 14, oraz jedno zadanie z listy poprzedniej